

SOLUCIONES A LAS ACTIVIDADES PROPUESTAS EL 18 DE MAYO

22) En este ejercicio nos piden resolver dos casos relativos a la caída libre de los cuerpos:

En el apartado **a)** tenemos dos cuerpos distintos que caen desde 50 m de altura hasta el suelo y en la Tierra. En primer lugar, la caída NO depende de la masa del cuerpo, así que **ambos caerán de igual forma**, es decir en igual tiempo y con igual velocidad. (Debes recordar que la “impresión” de que los cuerpos más “pesados” caen más rápido que los menos pesados es falsa y se debe únicamente al rozamiento con el aire, que normalmente ignoramos porque no caemos en la cuenta de que el aire existe (aunque no se ve).)

Voy a “explicar” de donde podemos sacar la expresión matemática que aparece en el texto para encontrar directamente la velocidad sabiendo la distancia sin necesidad de calcular el tiempo, y que se usa en el ejemplo resuelto de la página 138 (figura como la tercera fórmula al margen de la página 135. También voy a deducir paso las otras dos, que se vieron el curso pasado, pero quizá no recuerdes). No es necesario que te aprendas esto, sino que entiendas de donde salen esas “fórmulas misteriosas”:

Sabemos que la definición de aceleración es:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{\Delta t} \Rightarrow v = v_0 + a \cdot \Delta t$$

Y por otra parte en un movimiento uniformemente acelerado la velocidad se incrementa de modo progresivo de forma que la velocidad media en un intervalo de tiempo no es más que la media de las velocidades inicial y final, por lo que también se cumple que (sustituyendo v por lo calculado arriba y con un poco de álgebra):

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{\Delta t} = \frac{v + v_0}{2} \Rightarrow x = x_0 + (v + v_0) \cdot \frac{\Delta t}{2} = x_0 + (v_0 + a \cdot \Delta t + v_0) \cdot \frac{\Delta t}{2} \Rightarrow$$
$$x = x_0 + 2 \cdot v_0 \cdot \frac{\Delta t}{2} + a \cdot \Delta t \cdot \frac{\Delta t}{2} \Rightarrow x = x_0 + v_0 \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot \Delta t^2$$

Combinando las dos relaciones anteriores mediante un poco más de álgebra y recordando las propiedades de los cuadrados de una diferencia, se tiene que:

$$\Delta v = a \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta v^2 = a^2 \cdot \Delta t^2$$
$$\Delta x = x - x_0 = v_0 \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 \cdot \Delta t^2}{a} = v_0 \cdot \Delta t + \frac{1}{2 \cdot a} \cdot \Delta v^2 \Rightarrow$$
$$2 \cdot a \cdot \Delta x = 2 \cdot v_0 \cdot (a \cdot \Delta t) + \Delta v^2 = 2 \cdot v_0 \cdot (v - v_0) + (v^2 + v_0^2 - 2 \cdot v \cdot v_0) = v^2 - v_0^2 \Rightarrow$$
$$v^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot \Delta x$$

Y con esto podemos volver a la resolución del ejercicio. Recordando que si ponemos el valor de la coordenada $x = 0$ en el suelo, y que la aceleración de la gravedad debe tener signo negativo (por eso en las fórmulas del texto aparece como $-g$, se tiene que, retomando el ejercicio:

$$v = \pm \sqrt{v_0^2 - 2 \cdot g \cdot \Delta x} = \pm \sqrt{0 - 2 \cdot 9,8 \cdot (0 - 50)} \text{ m/s} = \pm 31,3 \text{ m/s}.$$

Debemos coger la solución negativa porque el cuerpo está cayendo. La solución positiva significaría que, si lanzamos el cuerpo con esa velocidad hacia arriba, llegaría hasta la altura de 50 m, donde se pararía un instante para volver a caer. Así que la solución pedida es $v = -31,3 \text{ m/s}$.

En el apartado **b)** debemos repetir el cálculo anterior pero ahora con otros valores de la aceleración de la gravedad:

En la Luna tendremos:

$$v = -\sqrt{v_0^2 - 2 \cdot g \cdot \Delta x} = -\sqrt{0 - 2 \cdot 1,62 \cdot (0 - 50)} \text{ m/s} = -12,73 \text{ m/s}.$$

Y en Júpiter:

$$v = -\sqrt{v_0^2 - 2 \cdot g \cdot \Delta x} = -\sqrt{0 - 2 \cdot 24,79 \cdot (0 - 50)} \text{ m/s} = -49,8 \text{ m/s}.$$

4) En el apartado **a)**, debemos deducir la relación entre las magnitudes que se representan y la correspondencia con los tipos de movimiento. Hay que recordar los siguientes casos:

Si no hay movimiento, x permanece invariable, así que la gráfica x - t debe ser una recta horizontal. Si el movimiento es un MRU, la velocidad es constante, así que la gráfica v - t debe ser una recta horizontal y la gráfica x - t debe ser una recta inclinada (más inclinada cuanto mayor sea el valor de la velocidad).

Si el movimiento es un MRUA, la aceleración es constante, así que la gráfica a - t debe ser una recta horizontal, la gráfica v - t debe ser una recta inclinada (más inclinada cuanto mayor sea el valor de la aceleración) y la gráfica x - t debe ser una parábola (recuerda que esto se explicó el curso pasado) curvada hacia arriba o hacia abajo según el signo de la aceleración.

Con la justificación dada arriba, es inmediato deducir que la correspondencia pedida será:

MRU: **a), d)**

MRUA: **c), f)**

En el apartado **b)**, la respuesta es que la gráfica b) se corresponde a un cuerpo que **está parado** y la gráfica e) se corresponde a un cuerpo con **aceleración creciente** (la aceleración no es constante, sino que aumenta con el tiempo).

En el apartado **c)**, tendremos que la gráfica v - t del caso representado en la gráfica a) será una línea horizontal (v constante), es decir tendremos algo similar a la gráfica d). En el caso representado en la gráfica b), dado que el cuerpo está parado su velocidad es nula, y tendremos una línea horizontal, pero para $v = 0$, es decir en el eje horizontal.

5) En este ejercicio debemos razonar con lo que ocurre en un movimiento vertical:

En el apartado **a)** dejamos caer un cuerpo, por lo que el movimiento es vertical hacia abajo, con velocidad inicial cero y por tanto la velocidad incrementa su valor absoluto debido a la aceleración de la gravedad. El módulo de la velocidad aumenta proporcionalmente al tiempo. La relación matemática será: **$v = -g \cdot t$** .

En el apartado **b)** tenemos el lanzamiento hacia arriba con una cierta velocidad inicial, v_0 , positiva, pero la aceleración de la gravedad, negativa, hace que esta velocidad disminuya con el tiempo frenándose paulatinamente el cuerpo hasta que se detendría en un momento dado para luego volver a caer, con velocidad negativa. La relación matemática de la velocidad con el tiempo será:

$$v = v_0 - g \cdot t.$$

6) Para resolver este ejercicio, hay que emplear las relaciones matemáticas dadas en el texto (y que se han deducido más arriba).

Como nos dan el valor de la velocidad inicial y conocemos el valor de la aceleración de la gravedad, y sabemos que cuando el cuerpo se para en el punto más alto de su trayectoria la velocidad final debe ser cero, tenemos (si ponemos las unidades en el SI, el resultado también tendrá las unidades del SI):

$$v = v_0 + a \cdot \Delta t \Rightarrow 0 = 20 - 9,8 \cdot t \Rightarrow t = \frac{-20}{-9,8} = 2,04 \text{ s}.$$

Para calcular la altura máxima es más útil emplear la ecuación en la que no interviene el tiempo, y teniendo en cuenta que como se lanza desde el suelo $x_0 = 0$:

$$v^2 = v_0^2 - 2 \cdot g \cdot \Delta x \Rightarrow x = \frac{v_0^2 - v^2}{2 \cdot g} = \frac{20^2 - 0}{2 \cdot 9,8} = 20,41 \text{ m.}$$

Podemos calcular ahora el tiempo que tarda en caer (desde que está en el punto más alto de la trayectoria, con lo que ahora tomamos la velocidad inicial igual a cero) como:

$$x = x_0 + v_0 \cdot \Delta t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow 0 = 20,41 + 0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9,8 \cdot t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{-20,41 \cdot 2}{-9,8}} = 2,04 \text{ s.}$$

Fíjate en que es lógico que, si tarda 2,04 s en subir hasta el punto más alto, tardará exactamente lo mismo en caer desde ese punto, dado que la aceleración es la misma en ambos casos. Si considerásemos como que el tiempo de caída que nos piden es contando desde que se lanzó, entonces el resultado sería $2 \cdot 2,04 \text{ s} = 4,08 \text{ s}$.

Pero entendido así, es decir el movimiento completo *de subida y de bajada*, podríamos haber calculado el resultado de una manera más rápida e ingeniosa:

El punto inicial del movimiento es $x_0 = 0$ y el punto final es $x = 0$, así que se cumple:

$$x = x_0 + v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow 0 = 0 + 20 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9,8 \cdot t^2 \Rightarrow 20 \cdot t = 4,9 \cdot t^2$$

Esta ecuación tiene dos soluciones, una que es $t = 0$, lo que significa que es el instante inicial, justo cuando se lanza y la otra solución, la que corresponde a que el cuerpo que cae llega al suelo, es:

$$t = \frac{20}{4,9} = 4,08 \text{ s.}$$

10) En este ejercicio debemos completar la tabla haciendo los cálculos correspondientes con los datos de la misma columna, teniendo en cuenta que para $t = 0$, $x_0 = 0$ y $v_0 = 0 \text{ m/s}$.

Para $t = 5 \text{ s}$ y una velocidad $v = 40 \text{ m/s}$, debemos utilizar estas dos relaciones (la primera responde ya a la pregunta b):

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{40}{5} = 8 \text{ m/s}^2.$$

$$x = x_0 + v_0 \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot \Delta t^2 = 0 + 0 \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5^2 = 100 \text{ m.}$$

Para la última columna, conocemos la posición y la aceleración, así que podemos usar la relación de las velocidades:

$$v^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot \Delta x = 0^2 + 2 \cdot 8 \cdot (700 - 0) \Rightarrow v = \sqrt{11200} = 105,8 \text{ m/s.}$$

Y la de la posición para calcular el tiempo:

$$x = x_0 + v_0 \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot \Delta t^2 \Rightarrow 700 = 0 + 0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{700}{4}} = 13,23 \text{ s.}$$

[Hay un modo alternativo de calcular el dato de la posición para $t = 5$, comparando las ecuaciones de posición en este instante y en el instante $t = 10$, sin necesidad de haber calculado la aceleración:

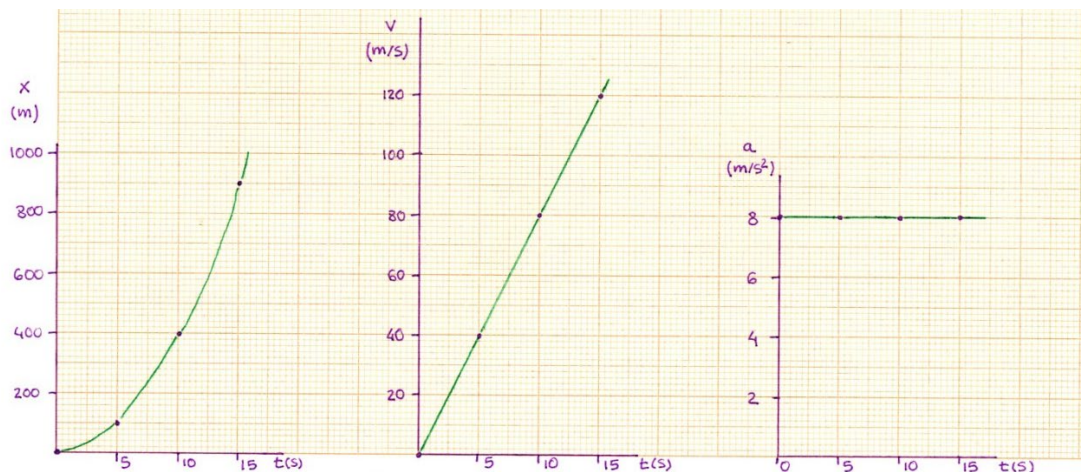
$$\text{Para } t = 5: \quad x = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 5^2 \Rightarrow 2x = 25 \cdot a$$

$$\text{Para } t = 10: \quad 400 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 10^2 \Rightarrow 800 = 100 \cdot a$$

Eliminando a entre ambas ecuaciones, se tiene que $8 \cdot x = 800 \Rightarrow x = 100 \text{ m}$.

Se podría hacer la última columna de manera similar manejando las ecuaciones oportunas, pero sin necesidad de calcular la aceleración. Pero esto no tiene sentido dado que es inmediato y más simple calcular la aceleración y utilizarla en los cálculos.]

Las gráficas pedidas en el apartado c) se dan a continuación, dibujadas en papel milimetrado:



13) En este ejercicio, como nos dan la fórmula de la variación de la velocidad con el tiempo, vemos que es un movimiento uniformemente acelerado (depende linealmente del tiempo), un **MRUA**. El coeficiente del tiempo es positivo, así que la velocidad se incrementa.

La velocidad inicial es la que corresponde a $t = 0$, lo que significa que $v_0 = 30 \text{ m/s}$.

La velocidad a los 5 s se calcula usando la fórmula: $v = 30 + 3 \cdot 5 = 45 \text{ m/s}$.

La aceleración viene dada por el coeficiente de t , que es $a = +3 \text{ m/s}^2$.

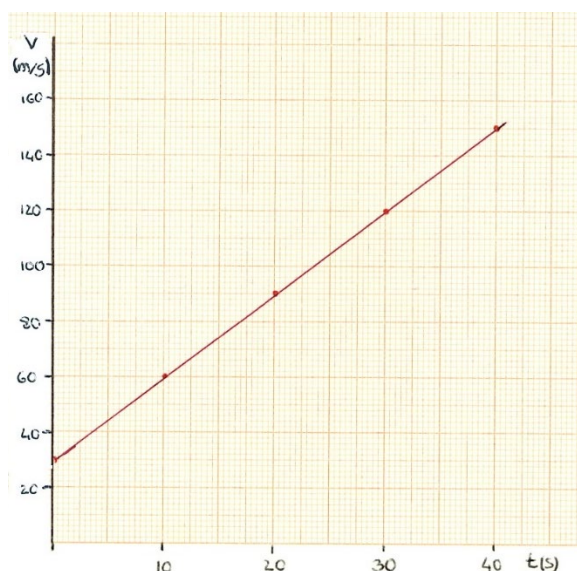
La distancia recorrida viene dada por:

$$\Delta x = v_0 \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot \Delta t^2 = 30 \cdot 50 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 50^2 = 5250 \text{ m}.$$

El tiempo requerido para que la velocidad sea 35 m/s se calcula directamente:

$$35 = 30 + 3 \cdot t \Rightarrow t = \frac{35 - 30}{3} = 1,67 \text{ s}.$$

La gráfica v - t del movimiento se da abajo.



14) Este ejercicio es un poco más complicado si no se piensa y se plantea detenidamente. Se resuelve teniendo en cuenta que hay dos fases de movimiento: en la primera se deja caer la piedra, que caerá de manera acelerada y tardará un cierto tiempo, t_1 , en llegar al agua, y una segunda fase en la que el sonido del choque llega a nuestros oídos, en lo que tardará un tiempo t_2 . La suma de estos dos tiempos es los 4 segundos que nos dice el enunciado. Si denominamos x la profundidad

del pozo (tomamos $x_0 = 0$), tendremos las siguientes relaciones, sabiendo que la caída de la piedra sigue un movimiento acelerado y el sonido se desplaza de manera uniforme:

$$x = x_0 + v_0 \cdot t_1 - \frac{1}{2}g \cdot t_1^2 = 0 + 0 \cdot t_1 - \frac{1}{2} \cdot 9,8 \cdot t_1^2 \Rightarrow x = -4,9 \cdot t_1^2$$

(Debe tenerse en cuenta que como tomamos como referencia el suelo, la profundidad del pozo viene dada por un valor de x negativo.)

Para el sonido se tendrá (ojo, porque parte desde el fondo del pozo, que hemos llamado x , y llega a la superficie, que es la posición x_0):

$$x_0 = x + v_s \cdot t_2 \Rightarrow 0 = x + 340 \cdot t_2 \Rightarrow x = -340 \cdot t_2$$

Si igualamos ambas expresiones eliminando x (ya lo calcularemos luego porque de momento tenemos las incógnitas del tiempo) y tenemos en cuenta que $t_1 + t_2 = 4$ segundos, podemos encontrar una ecuación cuadrática en t_1 (o también podría ser t_2 , pero sería más complicada), que debemos resolver y elegir solo la solución positiva:

$$\begin{aligned} 340 \cdot (4 - t_1) &= 4,9 \cdot t_1^2 \Rightarrow 4,9 \cdot t_1^2 + 340 \cdot t_1 - 1360 = 0 \Rightarrow \\ t_1 &= \frac{-340 \pm \sqrt{(-340)^2 - 4 \cdot 4,9 \cdot (-1360)}}{2 \cdot 4,9} = \frac{-340 \pm 377,17}{9,8} = 3,793 \text{ s.} \end{aligned}$$

(Es evidente que, como el sonido se mueve a gran velocidad, la mayor parte del tiempo total se debe al tiempo de la caída de la piedra.)

Con esto, ya podemos calcular el valor de la profundidad del pozo:

$$x = -4,9 \cdot t_1^2 = -4,9 \cdot 3,793^2 = -70,5 \text{ m.}$$

La profundidad es de 70,5 metros.